Ueber involutorische Strahlenbüschel,

deren Centrum auf einem Kegelschnitte liegt.

(Mit einer Figurentafel.)

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Arwed Wilhelm Conrad Klippert,

Lehrer am Gymnasium in Hersfeld.

Marburg.

1872.

Druck von L. Happich in Hersfeld.

„Wenn durch einen auf einem gegebenen Kegelschnitte „angenommenen Puncte zwei grade Linien rechtwinkelig zu „einander so gezogen werden, daß sie die Curve schneiden, „so geht die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte durch „einen festen Punkt in der Normalen.“

Man findet diesen Satz in Salmon's analyt. Geom. d. Kegelschnitte bearbeitet von Fiedler (II. Aufl. pag. 217) durch folgende Betrachtungen bewiesen:

„Nimmt man die Tangente und Normale der Curve in dem gegebenen Punkte zu Coordinatenaxen, so muß die Gleichung der Curve von der Form sein *)

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{23} y = 0$$

($a_{33} = 0$, weil der Ursprung der Coordinaten in der Curve liegt und $a_{13} = 0$, weil die Tangente als Axe der X vorausgesetzt ist.)

Ist nun die Gleichung irgend zweier graden Linien durch den Anfangspunkt der Coordinaten durch:

$$x^2 + 2pxy + q y^2 = 0$$

repräsentirt, so multipliciren wir diese Gleichung mit a_{11} und subtrahiren sie von der der Curve und erhalten:

---

*) Es ist dabei die allgemeine Gleichung 2ten Grades in der bekannten Form:
$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$
vorausgesetzt.

$$2\,(a_{12} - a_{11}\,p)\,xy + (a_{22} - a_{11}\,q)\,y^2 + 2a_{23}\,y = 0$$

als Gleichung einer durch die Durchschnittspunkte der bezeichneten graden Linien und des Kegelschnitts gehenden Figur. Aber dieselbe kann in

$$y = 0$$

(die Gleichung der Tangente in dem gegebenen Punkte) und

$$2\,(a_{12} - a_{11}\,p)\,x + (a_{22} - a_{11})\,y + 2\,a_{23} = 0$$

zerlegt werden, und diese letztere muß daher die Gleichung der die Endpunkte der gegebenen Linien verbindenden Sehne sein. Der Punkt, in welchem diese Sehne die Normale, die Axe der Y, schneidet ist bestimmt durch seine Ordinate

$$y = \frac{2a_{23}}{a_{11}q - a_{22}}$$

Wenn aber die beiden Geraden rechtwinklig sind, ist

$$q = -1$$

und der Abschnitt in der Normalen hat die constante Länge

$$= - \frac{2a_{23}}{a_{11} + a_{22}}$$

Für den Kreis ist diese constante Länge dem Halbmesser gleich, für die gleichseitige Hyperbel ist sie unendlich groß. Die fragliche Linie ist immer der Normalen parallel. Wenn man daher durch einen Punkt der gleichseitigen Hyperbel zwei zu einander rechtwinklige Sehnen zieht, so ist die von ihm auf die grade Verbindungslinie ihrer Endpunkte gefällte Normale die Tangente der Curve.

Der Beweis zeigt auch, daß dieser Satz allgemein dann wahr ist, wenn die graden Linien mit der Normalen Winkel bilden, für welche das Product der trigonometrischen Tangenten constant ist, denn dann ist q constant und der Abschnitt:

$$\frac{2\,a_{23}}{a_{11}\,q - a_{22}}$$

desgleichen." —

Diese letzte Erweiterung des Satzes weist, da durch die Bedingung des constanten Tangentenproducts eine Involution jener Geraden bedingt wird, darauf hin, daß er ein specieller Fall ist von der Umkehrung des folgenden bekannten*) Satzes:

„Die Endpunkte aller durch einen beliebigen Punkt in „der Ebene eines Kegelschnitts gezogenen Sehnen bilden „mit einem beliebigen Peripheriepunkt des Kegelschnitts durch „Gerade verbunden ein involutorisches Strahlenbüschel.“

Zufolge einer Notiz in Seidewitz: das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene ꝛc. pag. 71 scheint unser Satz von Poncelet in traité des propr. proj. des fig. art. 483, 1° zuerst gegeben worden zu sein; wir wollen ihn deßhalb in der Folge kurz als den Poncelet'schen Satz bezeichnen. —

Es erschien uns nun die Frage nicht ohne alles Interesse zu sein, wie sich der geometrische Ort aller nach dem Poncelet'schen Satze auf der Normalen sich ergebenden Punkte gestalte und haben wir dieselbe in folgendem zunächst für diesen einfachsten Fall, wobei $q = -1$, sowie dann auch für ein beliebiges q behandelt. —

§. 1.

Für die Ellipse wird sich bei $q = -1$ die Rechnung sehr einfach gestalten, indem für die im Satz vorkommenden senkrechten Geraden Parallele zu den Axen gewählt werden können.

Ist die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und hat ein beliebiger Punkt P (Fig. 1.) die Coordinaten

1. $$x_1 = \xi\,;\quad y_1 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \xi^2}$$

*) Vgl. z. B. Chasles, traité des sections coniques I. pag. 101 Nr. 139.

2. Der evangelische Kirchenbegriff.

a) Der Begriff der lutherischen Kirche.

Auch der evangelische Kirchenbegriff ist in der Heiligen Schrift verankert. Aber das Wort Gottes hat für die Kirche Luthers eine ganz andere Bedeutung. Sie kennt nicht die katholische Auffassung, nach der Glaubens- und Rechtssatz ineinander übergehen; sie sieht in der Bibel nicht die Grundlage für ihre Organisation und Verfassung. Für die evangelische Kirche ist Christus der Stifter ihrer Glaubenslehre, der Verkünder des „Reiches Gottes", der Gründer der unsichtbaren, nicht der heute sichtbaren Kirche. Christus wollte keine weltliche Macht aufrichten [1]), er war nicht gekommen, um sich zum König der Juden zu machen, wie es einige seiner Anhänger so gern gesehen hätten; er lehnte es auch ab, das Volk von dem äußeren politischen Joch zu befreien, das es von Rom her zu erdulden hatte; sondern predigte: „Gebt dem Kaiser, was des Kaisers ist, und Gott, was Gottes ist" [2]). Auf wie wenig Verständnis er dabei stieß, das lehrt uns der Bericht der Evangelisten über die Empörung des Volkes darüber, daß er nicht ein irdisches Königreich aufrichtete, sondern den Weg des Kreuzes ging. Selbst seine eigenen Jünger verstanden nicht immer den tiefsten Sinn seiner Worte. So ist es auch verständlich, daß die äußere weltliche Seite bei der ersten großen christlichen Kirche, der katholischen, eine ziemlich bedeutende Rolle spielt, da man in der Schrift die Grundlage für die Organisation der Kirche sucht und findet.

Zu welch ganz anderen Ergebnissen kommen dagegen unsere Reformatoren, kommt ein Mann wie Luther, der nur von der einen großen Frage erfüllt war: „Wie erlange ich einen gnädigen Gott?"

„So halten wir nun dafür, daß der Mensch gerecht werde ohne des Gesetzes Werke allein durch den Glauben" [3]). In diesen Worten können wir den Grundgedanken lutherischer Kirchenauffassung erblicken. Der Weg zu Gott führt nicht über äußere Werke, sondern er verlangt Beteiligung des inneren Menschen und erfordert wahren Glauben an Christus, der für uns gelitten hat.

Der rechte Glaube aber wird durch das Wort Gottes, das in der Heiligen Schrift offenbar ist, begründet. Auf diese Weise steht das Wort Gottes im Mittelpunkt der Kirchenauffassung Luthers. Alle diejenigen gehören zur Kirche, die durch das „Wort" vom rechten Glauben an Jesus

---

1) Luk. 17 v. 20—21: „Das Reich Gottes kommt nicht mit äußerlichen Gebärden; man wird auch nicht sagen: siehe, hier oder: da ist es. Denn sehet, das Reich Gottes ist inwendig in euch".

2) Matth. 22 v. 21.

3) Röm. 3 v. 28; vgl. hierzu Confessio Augustana Art. 4: „Von der Rechtfertigung: Weiter wird gelehret, daß wir Vergebung der Sünden und Gerechtigkeit vor Gott nicht erlangen mögen durch unser Verdienst, Werke und Genugtuung, sondern daß wir Vergebung der Sünden bekommen und vor Gott gerecht werden aus Gnaden um Christus willen durch den Glauben, so wir glauben, daß Christus für uns gelitten hat und daß uns um seinetwillen die Sünde vergeben, Gerechtigkeit und ewiges Leben geschenkt wird. Denn diesen Glauben will Gott für Gerechtigkeit vor ihm halten und zurechnen, wie St. Paulus sagt zu den Römern am 3. und 4."

Christus erfüllt sind. Eine solche Kirche ist nicht greifbar und feststellbar, sie ist unsichtbar und überall dort vorhanden, wo das Wort „lauter und rein gepredigt wird" und der wahre Glaube an dieses Wort zu finden ist. Die Kirche ist die „Gemeinschaft der Heiligen", das Reich Gottes eine unsichtbare Personengemeinschaft, die allein durch den Glauben erfaßt werden kann. Dieser unsichtbaren Gemeinschaft ist von Gott die Aufgabe gestellt worden, das Evangelium zu predigen, die Sakramente zu verwalten und Sünden zu vergeben. Jeder einzelne der Gläubigen kann das Heil vermitteln; jeder ist befähigt, die der Kirche übertragene Vollmacht auszuüben. Es gilt der Grundsatz des sog. „allgemeinen Priestertums". Eine Vermittlung des Heils durch den Priester, wie es die katholische Kirche kennt, lehnt Luther ab. Jeder ist sein eigener Priester. Wenn freilich auch in der evangelischen Kirche bestimmten Personen die Verkündigung des Wortes Gottes und die Verwaltung der Sakramente vorbehalten ist[4]), so ist das lediglich um der Ordnung willen geschehen, nicht aber in der der katholischen Kirche eigenen Absicht der Heilsvermittlung.

Die Auffassung Luthers von der Kirche aber ist zu ideal, als daß sie in der Welt der Wirklichkeit unangefochten bestehen könnte. Es entsteht das Bedürfnis nach einer sichtbaren, faßbaren Kirche. Bereits bei Melanchthon finden wir denn auch die ersten Ansätze einer engeren Umgrenzung dieses unbestreitbar großartigen Kirchenbegriffs Luthers. In Art. 7 der Augsburger Konfession heißt es: „Von der Kirche: Es wird auch gelehrt, daß alle Zeit müsse *eine heilige christliche Kirche* sein und bleiben, welche ist die *Versammlung aller Gläubigen, bei welchen* das Evangelium rein gepredigt wird und die heiligen Sakramente laut des Evangeliums gereicht werden. Und ist es nicht not zu wahrer Einigkeit der christlichen Kirche, daß allenthalben gleichförmige Zeremonien, von den Menschen eingesetzt, gehalten werden, wie Paulus spricht Epheser 4, 4/5: Ein Leib, ein Geist, die ihr berufen seid zu einerlei Hoffnung eures Berufs, ein Herr, ein Glaube, eine Taufe."

Nach strenger lutherischer Anschauung enthält diese Fassung einen Widerspruch. Das wird uns klarer, wenn wir den lateinischen Text zugrunde legen. Melanchthon spricht von einer „congregatio sanctorum, *in qua* evangelium recte docetur". Die congregatio sanctorum ist die Versammlung der Heiligen, die große unsichtbare Kirche, die überall dort ist, wo rechter Glaube und Verkündigung des Wortes Gottes ist, und die äußerlich nicht umgrenzt werden kann. Das „in qua" setzt aber eine örtlich begrenzte sichtbare Gemeinschaft voraus. In der unsichtbaren Kirche kann das Wort Gottes nicht gepredigt werden. So sind bereits hier, durch die Bedürfnisse des praktischen Lebens bedingt, zwei Begriffe miteinander verschmolzen: der der sichtbaren und der der unsichtbaren Kirche. Der einen großen, unsichtbaren Kirche stehen zahlreiche sichtbare Kirchen gegenüber, die äußerlich erkennbar und organisiert sind. Schließlich läßt man die Unterscheidung zwischen unsichtbarer und sichtbarer Kirche fallen, denn es zeigt sich immer mehr die praktische Notwendigkeit, die sichtbare Kirche zu stärken.

4) Confessio Augustana Art. 14: Vom Kirchenregimente: Vom Kirchenregiment wird gelehrt, daß niemand in der Kirche öffentlich lehren oder predigen oder Sakramente reichen soll, ohne ordentlichen Beruf.

$$x_4 = \frac{\xi}{a^2}(a^2 - b^2); \; y_4 = 0$$

so muß man ihnen als zu Punkten auf der Graden PQ gehörig die Form:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

geben können; sie erhalten dieselben für den Werth

$$\lambda = \mp \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

woraus man erkennt, daß M und N harmonisch sind zu P und Q, und man mithin den folgenden Satz aufstellen darf:

„Bestimmt man zu einem beliebigen Punkt P eines Kegelschnitts und den beiden Punkten M und N, worin seine Normale die Hauptaxen schneidet den vierten harmonischen Q, so schneiden die durch denselben gehenden Sehnen den Kegelschnitt immer in einem Punktpaar, dessen Verbindungslinien mit P aufeinander senkrecht sind.“ —

§. 3.

Untersuchen wir nun die Parabel, so ist deren Gleichung

$$y^2 = p \cdot x$$

und es kann wie bei der Ellipse verfahren werden. Ein beliebiger Punkt P (Fig. 2) habe die Coordinaten

$$y = \eta; \; x = \frac{\eta^2}{p}$$

P_1 dagegen

$$y = \eta; \; x = \infty$$

dann hat $P_1{}'$ die Coordinaten:

$$y = -\eta; \; x = \frac{\eta^2}{p}$$

Die Verbindungsgerade $P_1 P_1{}'$ ist also, was auch schon daraus zu entnehmen ist, daß sie durch den unendlich entfernten Parabelmittel-

punkt geht, eine Parallele zur X-Achse in der Entfernung:

$$y = -\eta \qquad 1.$$

welches zugleich die Gleichung derselben ist. Die allgemeine Gleichung der Normalen:

$$y - y^1 = -\frac{2y^1}{p}(x - x^1)$$

wird für die Coordinaten unseres Punktes P:

$$p(y - \eta) + 2\eta\left(x - \frac{\eta^2}{p}\right) = 0 \qquad 2.$$

und man erhält (mit 1) die Abscisse des Durchschnittspunkts Q

$$x = p + \frac{\eta^2}{p}$$

Eliminirt man nun η (aus 1 und 3) so ergiebt sich:

$$px = p^2 + y^2$$

oder

$$y^2 = p(x - p)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, der also eine congruente Parabel mit derselben Axe ist, nur um p verschoben. (Dies Resultat läßt sich auch schon aus dem bekannten Satz, daß die Subnormale immer $= \frac{p}{2}$ ist, herleiten.)

Die bei der Ellipse angegebene harmonische Beziehung zwischen den Punkten P, Q, M, N behält auch bei der Parabel Gültigkeit, indem Punkt N ins Unendliche fällt und demgemäß der Punkt M die Strecke PQ halbirt.

§. 4.

Ein eigenthümliches Verhalten findet statt bei den verschiedenen Gattungen von Kegelschnitten, wenn man für den Kegelschnitt, der von allen Punkten Q gebildet wird, immer wieder den zugehörigen geometrischen Ort bestimmt. Bei der Ellipse nämlich erhält man eine unendliche Reihe concentrischer, ähnlicher, immer kleinerer Ellipsen;

im speciellen Falle des Kreises dagegen sofort nur den einzigen Mittelpunkt, als unendlich kleinen Kreis. Bei der Hyperbel ergeben sich fortwährend wachsende Hyperbeln; im Falle der gleichseitigen jedoch nur die unendlich entfernte Gerade. Bei der Parabel endlich hat man immer wieder dieselbe, der ursprünglichen congruente Parabel.

Es läßt sich aber auch umgekehrt nach außen hin von der gegebenen Curve aus fortschreiten. Wir bekommen z. B. bei der Ellypse zum erstenmale eine ihr ähnliche mit den Halbaxen:

$$\alpha = a \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}; \quad \beta = b \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

u. s. w. Für den Kreis erhält man die unendlich entfernte Gerade und für die gleichseitige Hyperbel die Asymtoten ꝛc. —

§. 5.

Nachdem wir bei $q = 1$ gefunden haben, daß der fragliche Ort immer wieder ein Kegelschnitt ist, so fragt es sich jetzt, ob auch bei einem andern Werth von q jener Ort ein Kegelschnitt sei. Wir wollen uns jedoch bei dieser Untersuchung auf die Ellipse beschränken, da ja die sich ergebenden Resultate sofort auf die beiden andern Gattungen von Kegelschnitten übertragen werden könnten.

Es empfiehlt sich dann, die Coordinaten eines Punktes P (Fig. 3) auf der Ellipse in bekannter Weise durch eine Variabele, den sog. excentrischen Winkel, auszudrücken, also:

$$x = a . \cos\varphi . \quad y = b . \sin\varphi$$

zu setzen. —

Legen wir nun durch den Punkt P eine beliebige Grade l, so wird diese die Gleichung haben:

1. $$(x - a \cos\varphi) - \lambda (y - b . \text{hin}\, \varphi) = 0$$

und wir finden als Coordinaten ihres andern Durchschnittspunkts L mit der Ellipse folgende:

$$y_1 = - \frac{b}{a^2 + b^2 \lambda^2} . \left\{ (a^2 - b^2 \lambda^2) \sin\varphi + 2 ab \lambda \cos\varphi \right\}$$

$$x_1 = \frac{a}{a^2 + b^2 \lambda^2} \cdot \left\{ (a^2 - b^2 \lambda^2) \cos\varphi - 2ab\lambda \sin\varphi \right\}$$

Legen wir durch P eine zweite Gerade l_1, so wird ihr Durchschnittspunkt L_1, folgende Coordinaten haben:

$$y_{11} = - \frac{b}{a^2 + b^2 \lambda_1^2} \cdot \left\{ (a^2 - b^2 \lambda_1^2) \sin\varphi + 2ab\lambda_1 \cos\varphi \right\}$$

$$x_{11} = \frac{a}{a^2 + b^2 \lambda_1^2} \cdot \left\{ (a^2 - b^2 \lambda_1^2) \cos\varphi - 2ab\lambda_1 \sin\varphi \right\}$$

Für die Verbindungsgerade $L L_1$ ergiebt sich nach der Gleichung:

$$y (x_1 - x_{11}) - x (y_1 - y_{11}) + (y_1 x_{11} - x_1 y_{11}) = 0$$

der durch zwei Punkte bestimmten Geraden:

$$\begin{aligned} & a \cdot \left\{ ab (\lambda_1 + \lambda) \cos\varphi - (b^2 \lambda_1 \lambda - a^2) \sin\varphi \right\} y \\ & + b \cdot \left\{ ab (\lambda_1 + \lambda) \sin\varphi + (b^2 \lambda_1 \lambda - a^2) \cos\varphi \right\} x \\ & + ab \left\{ b^2 \lambda_1 \lambda + a^2 \right\} = 0. \end{aligned} \qquad 2.$$

Denken wir uns durch P noch zwei Gerade m u. m_1 gelegt und ihre Schnittpunkte M u. M_1 mit der Curve durch eine Gerade verbunden, so wird diese Sehne die Gleichung haben:

$$\begin{aligned} & a \cdot \left\{ ab (\mu_1 + \mu) \cos\varphi - (b^2 \mu_1 \mu - a^2) \sin\varphi \right\} y \\ & + b \cdot \left\{ ab (\mu_1 + \mu) \sin\varphi + (b_2 \mu_1 \mu - a^2) \cos\varphi \right\} x \\ & + ab \left\{ b^2 \mu_1 \mu + a^2 \right\} = 0. \end{aligned} \qquad 3.$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunkts Q beider Sehnen sind:

$$\begin{aligned} \eta = & - b \, [a^2 \sin\varphi \, [(\lambda' + \lambda) - (\mu_1 + \mu)] + 2ab \cos\varphi \, (\lambda_1 \lambda - \mu_1 \mu) \\ & + b^2 \sin\varphi \, [(\lambda' + \lambda) \mu_1 \mu - (\mu_1 + \mu) \lambda_1 \lambda]] : [a^2 [(\lambda_1 + \lambda) \\ & - (\mu_1 + \mu)] - b^2 [(\lambda_1 + \lambda) \mu_1 \mu - (\mu_1 + \mu) \lambda_1 \lambda]] \end{aligned} \qquad 4.$$

$$\xi = a\,[a^2 \cos\varphi\,[(\lambda_1 + \lambda) - (\mu_1 + \mu)] - 2ab \sin\varphi\,(\lambda_1 \lambda - \mu_1 \mu)$$
$$+ b^2 \cos\varphi\,[(\lambda_1 + \lambda)\,\mu_1\,\mu - (\mu_1 + \mu)\,\lambda_1\,\lambda]] : [a^2\,[(\lambda_1 + \lambda)$$
4. $$- (\mu_1 + \mu)] - b^2\,[(\lambda_1 + \lambda)\,\mu_1\,\mu - (\mu_1 + \mu)\,\lambda_1\,\lambda]]. -$$

§. 6.

Nehmen wir nun an, die Geraden l u. l_1, m u. m_1 gehörten zu einem involutorischen Strahlenbüschel, so müssen die Parameter $\lambda, \lambda_1 \ldots$ bekanntlich einer Gleichung von der Form:

$$a\,\lambda_1\,\lambda + b\,(\lambda_1 + \lambda) + c = 0$$

oder wenn wir den mittlern Coefficient = 1 annehmen

1. $$m\,\lambda_1\,\lambda - (\lambda_1 + \lambda) - n = 0$$
$$m\,\mu_1\,\mu - (\mu_1 + \mu) - n = 0$$

genügen. Aus diesen Gleichungen lassen sich leicht die folgenden herleiten:

$$\lambda_1\,\lambda - \mu_1\,\mu = \frac{1}{m}\,[(\lambda_1 + \lambda) - (\mu_1 + \mu)]$$

und

$$(\lambda_1 + \lambda)\,\mu_1\,\mu - (\mu_1 + \mu)\,\lambda_1\,\lambda = \frac{n}{m}[(\lambda_1 + \lambda) - (\mu_1 + \mu)]$$

wodurch die Formeln 4. des vorigen Paragraphen, wenn man zugleich den Factor:

$$(\lambda_1 + \lambda) - (\mu_1 + \mu)$$

im Dividend und Divisor wegläßt, sich verwandeln in:

$$\eta = -\,b\,\frac{(a^2 m + b^2 n)\,\sin\varphi + 2ab\,\cos\varphi}{a^2 m - b^2 n}$$

$$\xi = \quad a\,\frac{(a^2 m + b^2 n)\,\cos\varphi - 2ab\,\sin\varphi}{a^2 m - b^2 n}$$

welche zeigen, das unter der gemachten Voraussetzung einer Involution zwischen den durch P gelegten Geraden l l_1, m m_1 ....., der Schnittpunkt Q unveränderlich bleibt, womit also der in der

Einleitung erwähnten Satz über die durch einen beliebigen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts gezogenen Sehnen, oder eigentlich seine Umkehrung bewiesen ist.

§. 7.

Quadrirt man die Ausdrücke 2 des vorigen Paragraphen und addirt, so wird dadurch der Winkel φ eliminirt und wir erhalten unter Voraussetzung constanter Werthe von m und n:

$$\frac{x^2}{a^2 \frac{(a^2 m + b^2 n)^2 - 4 a^2 b^2}{(a^2 m - b^2 n)^2}} + \frac{y^2}{b^2 \frac{(a^2 m + b^2 n)^2 - 4 a^2 b^2}{(a^2 m - b^2 n)^2}} = 1$$

d. h. eine der ursprünglichen ähnliche Ellipse als geometrischen Ort für den Punkt Q.

Setzen wir $m = - n = \infty$, so ist die die Involution ausdrückende Gleichung:

$$\lambda_1 \lambda = - 1$$

und charactrisirt dieselbe den speciellen Fall der Involution, wo alle entsprechende Strahlen auf einander senkrecht sind; wir kommen also auf den Fall $q = - 1$ zurück, und es geht auch in der That der Factor:

$$\frac{(a^2 m + b^2 n)^2 - 4 a^2 b^2}{(a^2 m - b^2 n)^2}$$

über in:

$$\left\{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right\}^2$$

Wir werden später sehen, daß die Bedingung:

$$q = \text{const.}$$

nur in dem Fall, wo const. $= - 1$ ist, auf eine Bedingungsgleichung für die Involution mit constanten Coefficienten und zwar auf die letztere: $\lambda_1 \lambda = - 1$ führt, es fragt sich also, welche geometrische Bedeutung die Gleichung:

1. $$m \lambda_1 \lambda - (\lambda_1 + \lambda) - n = 0$$

für unsere Involution hat. Von den constanten m und n hängen die Axen sowie die Doppelstrahlen der Involution ab; indem man die Parameter der ersteren erhält, wenn mit der Gleichung (1) noch die $\lambda_1 \lambda = -1$ verbunden wird, während sich die anderen einfach aus:

$$m \lambda^2 - 2 \lambda - n = 0$$

ergeben. Bedenkt man nun, daß aus der Gleichung 1 des §. 5

$$\frac{1}{\lambda} = \operatorname{tang} \alpha$$

als Richtungscoefficient der Geraden l folgt, so erkennt man sofort, daß bei constantem m und n sowohl die Axen als auch die Doppelstrahlen jener involutorischen Strahlenbüschel immer denselben Winkel mit den Hauptaxen bilden müssen und wir haben daher den Satz:

„Durchläuft der Scheitel eines involutorischen „Stahlenbüschels einen Kegelschnitt so, daß die „Strahlen des Büschels fortwährend ihrer An„fangsrichtung parallel bleiben, so beschreibt der „für jede Lage des Büschels zu bestimmende Punkt „Q einen concentrischen ähnlichen und ähnlich ge„legenen Kegelschnit."

§. 8.

Um nun auf die durch den constanten Werth von q herzustellende Involution überzugehen, bestimmen wir jetzt die Winkel zwischen einer Geraden durch P und der Normalen dieses Punkts. Die Gleichung einer Normalen bei der Ellipse ist allgemein:

$$y - y^1 = \frac{a^2}{b^2} \frac{y^1}{x^1} (x - x^1)$$

also hier:

$$y = \frac{a}{b} \tan \varphi \,.\, x - \frac{a^2 - b^2}{b} \sin \varphi$$

Die Gleichung der Geraden PL ist:

$$y = \frac{1}{\lambda} x - \frac{a \cos\varphi}{\lambda} + b \sin\varphi$$

Bezeichnen wir nun mit α u. α_1 die Winkel, welche die Normale und die Gerade PL mit der X-Axe bildet und mit β u. β_1 die Winkel zwischen der Normale und PL resp. PL_1, so ist:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a}{b} \operatorname{tang} \varphi$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\lambda}$$

und hieraus folgt:

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \alpha_1}{1 + \operatorname{tang} \alpha \,.\, \operatorname{tang} \alpha_1}$$

$$= \frac{a \lambda \operatorname{tang} \varphi - b}{b \lambda + a \operatorname{tang} \varphi}$$

Ebenso ist:

$$\operatorname{tang} \beta_1 = \frac{a \lambda_1 \operatorname{tang} \varphi - b}{b \lambda_1 + a \operatorname{tang} \varphi}$$

Soll nun das Product der Tangenten der Winkel β u. β_1 constant $= q$ sein, so ist:

$$\operatorname{tang} \beta \,.\, \operatorname{tang} \beta_1 = \frac{a \lambda \operatorname{tang} \varphi - b}{b \lambda + a \operatorname{tang} \varphi} \cdot \frac{a \lambda_1 \operatorname{tang} \varphi - b}{b \lambda_1 + a \operatorname{tang} \varphi}$$

also:

$$q = \frac{a^2 \lambda_1 \lambda \operatorname{tang}^2 \varphi - (\lambda_1 + \lambda) ab \operatorname{tang} \varphi + b^2}{b^2 \lambda_1 \lambda + (\lambda_1 +) ab \operatorname{tang} \varphi + a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi}$$

oder:

$$(a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi - b^2 q) \lambda_1 \lambda - ab (1 + q) (\lambda_1 + \lambda) \operatorname{tang} \varphi - (a^2 q \operatorname{tang}^2 \varphi - b^2) = 0$$

oder auch:

$$\frac{a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi - b^2 q}{ab (1 + q) \operatorname{tang} \varphi} \lambda_1 \lambda - (\lambda_1 + \lambda) - \frac{a^2 q \operatorname{tang}^2 \varphi - b^2}{ab (1 + q) \operatorname{tang} \varphi} = 0$$

Hiermit wäre denn aus der Voraussetzung des constanten Tangen-

tenproducts eine Gleichung von der Form der (1) des §. 6 hergeleitet. Für $q = -1$ reducirt sich dieselbe, wie es auch sein muß, auf:

$$\lambda_1 \lambda = -1$$

und ist dies offenbar der einzige Werth von q, welcher bewirkt, daß die Coefficienten der Gleichung constant werden.

Wenn man die aus ihr zu entnehmenden Werthe von m u. n in die für η und ξ in demselben Paragraph angegebenen Werthe substituirt, so erhält man:

$$\eta = -b \sin\varphi \frac{a^4 \sin^2\varphi + a^2 b^2 q + 2a^2 b^2 \cos^2\varphi - b^4 \cos^2\varphi}{a^4 \sin^2\varphi - a^2 b^2 q + b^4 \cos^2\varphi}$$

$$\xi = a \cos\varphi \frac{a^4 \sin^2\varphi - a^2 b^2 q - 2a^2 b^2 \sin^2\varphi - b^4 \cos^2\varphi}{a^4 \sin^2\varphi - a^2 b^2 q + b^4 \cos^2\varphi}$$

oder:

$$\eta = -b \sin\varphi \frac{(a^2 - b^2)^2 \cos^2\varphi - a^2 (a^2 + b^2 q)}{(a^4 - b^4) \cos^2\varphi - a^2 (a^2 - b^2 q)}$$

$$\xi = a \cos\varphi \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2\varphi - b^2 (a^2 q + b^2)}{(a^4 - b^4) \sin^2\varphi - b^2 (a^2 q - b^2)}$$

Die Gleichung der Normalen, welcher wir die Form:

$$\frac{a x}{\cos\varphi} - \frac{b y}{\sin\varphi} = a^2 - b^2$$

geben können, wird von ihnen befriedigt, wie sofort zu ersehen, wenn man die zuerst gegebenen Werthe von η und ξ hineinsetzt, und ist damit die Salmon'sche Erweiterung unseres Satzes bewiesen.

Die Elimination des Winkels φ aus den Gleichungen für η und ξ würde die Gleichung des vom Punkte Q beschriebenen geometrischen Ortes zwischen rechtwinkligen Coordinaten liefern; wir begnügen uns damit nachgewiesen zu haben, daß derselbe nicht ein Kegelschnitt ist, sondern eine Curve von höherer Ordnung, deren weitere Discussion jedoch nicht dem offenbar dabei zur Verwendung kommenden Rechnungsaufwande entsprechen würde. Wir wollen uns daher, um die Gestalt dieser Ortscurven bei den verschiedenen

Werthen von q im Allgemeinen wenigsten kennen zu lernen, darauf beschränken für eine specielle Ellipse, einige characteristische Fälle der Curve durch Berechnung einer genügenden Anzahl von Coordinaten zu construiren. Zuvor mögen jedoch noch einige allgemeine Bemerkungen Platz finden.

§. 9.

Für $a = b = r$ geht unsere Ellipse in einen Kreis über und es müssen selbstverständlich dann auch alle Ortscurven Kreise geben; die Coordinaten eines Punktes von ihr sind dann:

$$\eta = - r \,.\, \sin\varphi \,.\, \frac{q + 1}{1 - q}$$

$$\xi = \quad r \,.\, \cos\varphi \,.\, \frac{q + 1}{1 - q}$$

und hat also dieselbe die Gleichung:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 \left\{ \frac{1 + q}{1 - q} \right\}^2$$

sie ist mithin ein concentrischer Kreis, dessen Radius kleiner oder größer als r ist, je nachdem $q \lessgtr 0$. Für $q = -$ reducirt sich derselbe wie eben gefunden, auf den Mittelpunkt, für $q = 1$ hat er einen unendlich großen Radius, für $q = 0$ ist er der gegebene Kreis selbst, für absolut größere Werthe von q als die Einheit wird er imaginär.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, wie die Thatsache, daß auch bei der Ellipse für $q = 0$ sie selbst als Ortscurve erhalten wird, welches vom rein geometrischen Gesichtspunkte aus sofort evident ist, indem dann ein Strahl der Involution immer die Normale selbst, also der Punkt Q ihr einer oder anderer Schnittpunkt mit der Ellipse sein muß, ihre analytische Bestätigung findet. Man erhält nämlich bei Quadrirung und Addition der Coordinatenwerthe:

$$\frac{\xi}{a} = \cos\varphi \, \frac{[(a^4 - 2a^2 b^2) \sin^2\varphi - b^4 \cos^2\varphi]}{a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi}$$

$$\frac{\eta}{b} = \sin\varphi \, \frac{[(b^4 - 2a^2 b^2) \cos^2\varphi - a^4 \sin^2\varphi]}{a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi}$$

rechts im Dividend das Quadrat vom Divisor. —

Bei dem speciellen Fall $q = + 1$ ist das Hauptaxenverhältniß der Ortscurve dasselbe wie das der zu Grunde liegenden Ellipse.

Betrachtet man die vorher gegebenen Coordinaten ξ u. η eines Punktes der Ortscurve näher, so erkennt man sofort, daß der Werth 0 bei einer jeden von ihnen einmal bewirkt werden kann durch den Factor $\cos\varphi$ resp. $\sin\varphi$ und andererseits auch durch Verschwinden des Dividendes vom zweiten Theil. Im ersten Falle werden die Punkte Q erhalten, welche auf der Scheitelnormalen der Ellipse liegen, also Endpunkte eines Quadranten der Ortscurve sind, im andern die reellen oder imaginären Schnittpunkte der Curve mit der betreffenden Coordinatenaxe. Das Verschwinden des Divisors liefert unendlich große Coordinatenwerthe, und erkennt man sofort, daß bei negativem q keine reellen unendlich entfernten Curvenpunkte existiren und bei positivem nur wenn $q > \frac{b^2}{a^2}$, wobei immer $a > b$ vorausgesetzt. Für die speciellen Werthe $q = - \frac{b^2}{a^2}$ und $q = - \frac{a^2}{b^2}$ gehört der Coordinatenanfang zur Curve und begegnen sich in ihm zwei Zweige derselben.

§. 10.

Wir haben nun für $a = 2$; $b = 1$ für diese soeben erwähnten Werthe, sowie für $q = + 1$, Systeme zusammengehörender Coordinatenwerthe berechnet, und in den folgenden Tabellen zusammengestellt:

I; q = + 1. (Fig. 4)

$$\xi = 2\cos\varphi \frac{9\sin^2\varphi - 5}{15\sin^2\varphi - 3}$$

$$\eta = -\sin\varphi \frac{9\cos^2\varphi - 20}{15\cos^3\varphi - 12}$$

$\varphi =$	$\xi =$	$\eta =$
0°	3,333 . . .	0
10°	3,741 . . .	0,968 . . .
20°	5,958 . . .	3,311 . . .
26° 34′	∞	∞
30°	— 6,351 . . .	— 8,833 . . .
45°	— 0,157	— 2,436 . . .
48° 11′	0	— 2,235 . . . .
60°	0,212	— 1,863 . . . . .
90°	0	— 1,666 . . . . .

II. $q = -\frac{1}{4}$ (Fig. 5.)

$$\xi = 2\cos\varphi \frac{9 \cdot \sin^2\varphi}{15 \cdot \sin^2\varphi + 1}$$

$$\eta = -\sin\varphi \frac{9 \cdot \cos^2\varphi - 25}{15 \cdot \cos^2\varphi - 20}$$

$\varphi =$	$\xi =$	$\eta =$
0°	0	0
10°	0,218 . . .	— 0,447 . . .
20°	0,521 . . .	— 0,642 . . .
30°	0,677 . . .	— 0,717 . . .
45°	0,669	— 0,782 . . . .
60°	0,509 . . .	— 0,833 . . .
90°	0	— 0,882 . . .

III. q = — 4 (Fig. 6.)

$$\xi = 2 \cos\varphi \frac{9 \sin^2\varphi + 15}{15 \sin^2\varphi + 17}$$

$$\eta = - \sin\varphi \frac{9 . \cos^2\varphi}{15 . \cos^2\varphi - 32}$$

$\varphi =$	$\xi =$	$\eta =$
0°	1,764 . . .	0
20°	1,608 . . .	1,449 . . .
30°	1,440 . . .	1,626 . . .
36°	1,321 . . .	0,156 . . .
45⁵	1,126 . . .	0,130 . . .
60°	0,770 . . .	0,087 . . .
90°	0	0

Von den vorstehenden, nach den Tabellen construirten Figuren sind die beiden letzten der Deutlichkeit wegen in vierfach größerem Maßstab als die erste. —

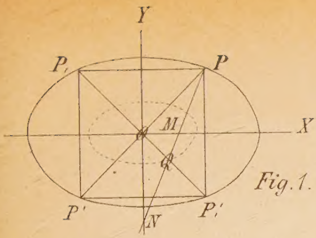


Fig. 1.

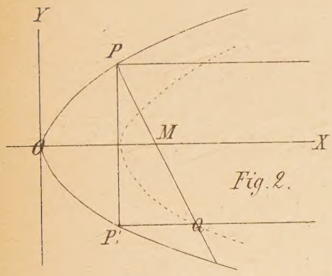


Fig. 2.

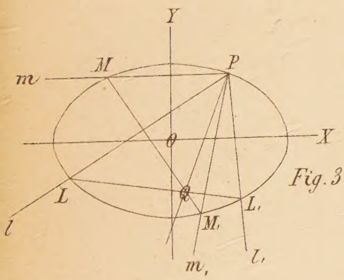


Fig. 3.

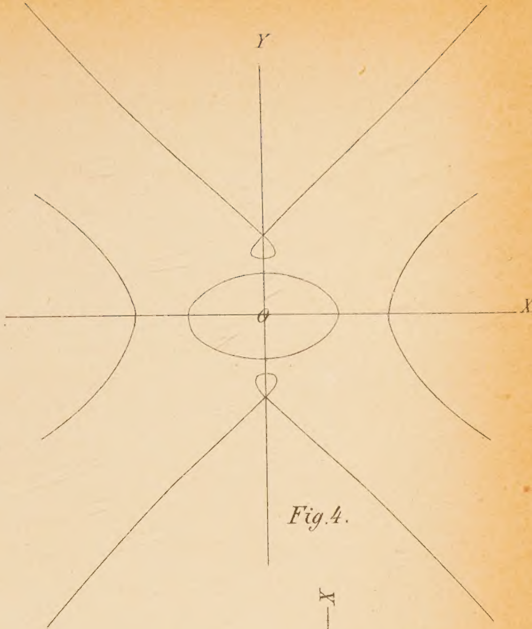


Fig. 4.



Fig. 5.

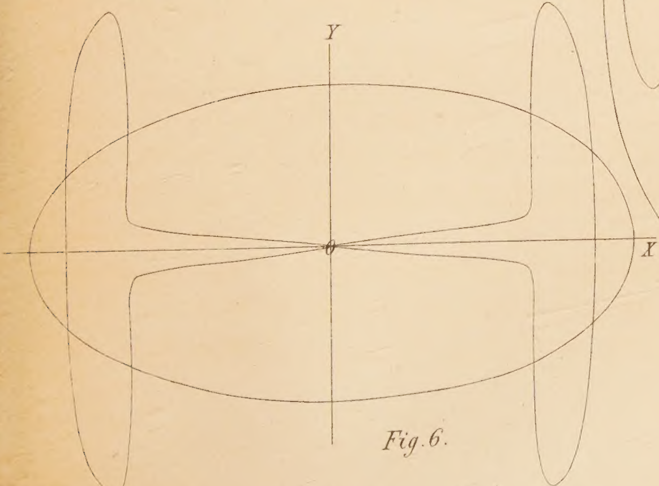


Fig. 6.